9 класс, ВАРИАНТ 13

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$.

Решение. Неравенство равносильно следующему:

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2\left(x^2-2x\right)+|x^2-2x|}\leqslant 0.$$

Знаменатель представляет собой выражение вида $2a+|a|$. Заметим, что знак этого выражения совпадает со знаком a при любых a. Действительно, если $a>0$, то $2a+|a|=3a>0$, а если $a<0$, то $2a+|a|=a<0$. Учитывая также, что числитель дроби неотрицателен при всех значениях переменной, имеем

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{x^2-2x}\leqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-3|-1=0,\\x^2-2x\neq 0,\end{cases}\\x^2-2x<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\text{ или }x=4,\\x\neq 0\text{ и }x\neq 2,\end{cases}\\0<x<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4,\\0<x<2.\end{array}\right.$$

Итак, $x\in(0;2)\cup\{4\}$.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

Ответ: 49.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть его биссектриса AN и медиана BM пересекаются в точке O. В треугольнике ABM отрезок AO является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник равнобедренный, $AM=BM$.
Обозначим $AB=y$, $y\in\mathbb{Z}$. Тогда $AM=MC=y$. По свойству биссектрисы $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$, поэтому если $BN=x$, то $CN=2x$. Сумма сторон треугольника равна периметру, т.е. $3(x+y)=600$, откуда $y=200-x$, поэтому $x\in\mathbb{Z}$. Учтём неравенство треугольника:

$$\begin{cases}2y<y+3x,\\3x<y+2y,\\y<2y+3x.\end{cases}\Leftrightarrow x<y<3x.$$

Так как $y=200-x$, то $x<200-x<3x\Leftrightarrow 50<x<100$. На этом интервале содержится 49 целых значений x.

Покажем, что никакая неупорядоченная тройка длин сторон треугольника $(a;b;c)$ не была посчитана более одного раза. Из двойного неравенства $x<y<3x$ заключаем, что из сторон треугольника y, $2y$ и $3x$ сторона y – наименьшая. Тогда по заданному значению y вся тройка $(a;b;c)$ восстанавливается однозначно: наименьшее из этих чисел равно y, ещё одно равно $2y$, а третье равно $p-y-2y$ (где p – периметр). Поэтому две различные неупорядоченные тройки длин сторон задаются различными значениями y.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy},\\x+y^2=5.\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2};-\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$, $(4;1)$.

Решение. Первое уравнение при условии $x-2y\geqslant 0$ равносильно уравнению $(x-2y)^2=xy$, откуда $x^2-5xy+4y^2=0$, $(x-y)(x-4y)=0$, т.е. $x=y$ или $x=4y$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $x=y$, то $y^2+y-5=0$, и получаем две пары $y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ и $x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.
Если $x=4y$, то $y^2+4y-5=0$, откуда также имеем две пары $y=1$, $x=4$ и $y=-5$, $x=-20$.

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x\geqslant 2y$ удовлетворяют только две из них: $\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2};-\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$, $(4;1)$.

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

Ответ: 4:3.

Решение. Пусть отрезки BO и AC пересекаются в точке N. Так как треугольник ABC равнобедренный, а BO является биссектрисой угла B, то биссектриса BN треугольника ABC является также его медианой и высотой. Пусть $\angle AON=\alpha$. Поскольку $OA\parallel CH$, то $\angle ACH=\alpha$. Отметим, что этот угол вписан в окружность и опирается на дугу AD, поэтому $\overset{\smile}{AD}=2\alpha$. По теореме об угле между касательной и секущей $\angle DAH=\frac{1}{2}\overset{\smile}{AD}=\alpha$. Кроме того, $\angle ABO=90^\circ-\angle AOB=90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha$.

Далее имеем:

$$
\begin{gathered}
AB=AO\operatorname{ctg}\alpha=4\operatorname{ctg}\alpha;\\
AN=AO\cos\alpha=4\cos\alpha;\ AC=2AN=8\cos\alpha;\\
AH=AC\sin\alpha=8\cos\alpha\sin\alpha;\\
DH=AH\operatorname{tg}\alpha=8\sin^2\alpha;\\
CH=AC\cos\alpha=8\cos^2\alpha;\\
AB:CH=4\operatorname{ctg}\alpha:(8\operatorname{ctg}^2\alpha)=1:(2\sin\alpha\cos\alpha);\\
S_{\triangle ABD}=\tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot DH=\tfrac{1}{2}\cdot 4\operatorname{ctg}\alpha\cdot 8\sin^2\alpha=16\cos\alpha\sin\alpha.
\end{gathered}
$$

Так как по условию площадь треугольника ABD равна 6, отсюда получаем $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$, и искомое отношение $AB:CH$ равно $4:3$.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

Ответ: $AD:AC=1:3$, $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Решение. Из точек C и E отрезок BD виден под углом 90°, поэтому точки B, C, D, E лежат на одной окружности. Но тогда $\angle CBD$ и $\angle CED$ вписаны в эту окружность и опираются на одну и ту же дугу, а значит, равны между собой, т.е. $\angle CBD=30^\circ$. Следовательно, $CD=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$. Тогда $AD=AC-CD=\frac{\sqrt{7}}{3}$, и $AD:AC=1:3$.

Вычислим площадь треугольника ADE. Обозначим его угол при вершине A через α. Далее находим: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\frac{7}{\sqrt{3}}$; $\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{7}}$, $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AD\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $5\pi-4$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы. Если обозначить $2x=a$, $y=b$, $4-2x-y=c$, то неравенство принимает вид $|a|+|b|+|c|>a+b+c$. Это неравенство не выполнено тогда и только тогда, когда все три числа a, b, c неотрицательны. Действительно, $|p|\geqslant p$ при всех p, причём при $p\geqslant 0$ выполняется равенство, а при $p<0$ – строгое неравенство. Значит, первое неравенство системы **не** выполнено при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ и $4-2x-y\geqslant 0$. Эти три неравенства определяют треугольник с вершинами в точках $A(2;0)$, $B(0;4)$, $O(0;0)$.

Второе неравенство может быть записано в виде $(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 5$ – оно задаёт круг радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке $M(1;2)$. Заметим, что точка M является серединой гипотенузы AB треугольника, AOB, а радиус круга равен половине гипотенузы. Это означает, что круг описан около треугольника AOB. Пересечением двух множеств является круг с центром M радиуса $\sqrt{5}$ с вырезанным из него треугольником ABO. Площадь этой фигуры равна $\pi\left(\sqrt{5}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=5\pi-4$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

Ответ: 145.

Решение. Подставляя $a=1$ в равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, получаем $f(b)=f(1)+f(b)$, значит, $f(1)=0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a=\frac{x}{y}$, $b=y$, то получаем $f(x)=f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab)=f(a)+f(b)$, например, $f(15)=f(3\cdot 5)=f(3)+f(5)=3+5=8$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n\in[1;18]$ и записываем их в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	0	2	3	4	5	5	7	6	6

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	7	11	7	13	9	8	8	17	8

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=f(1)=0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right)>0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$. Посчитаем количество пар $(x;y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$, нужно найти количество пар $(x;y)$ из таблицы выше, для которых $f(x)=f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x=y$. В данном случае имеется 18 вариантов.

- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 5$. В таблице есть 2 аргумента, при которых $f = 1$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 2 способами, а второй – 1 способом. Значит, количество пар такого типа равно $2 \cdot 1 = 2$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 6$. Аналогично предыдущему пункту получаем $2 \cdot 1 = 2$ пары.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 7$. Здесь $3 \cdot 2 = 6$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 8$. Здесь $3 \cdot 2 = 6$ пар.

Итого, есть $18+2+2+6+6 = 34$ пары натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $18^2 = 324$ пары, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{324-34}{2} = 145$.

9 класс, ВАРИАНТ 14

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

Ответ: $x\in\{-1\}\cup(0;3)$.

Решение. Неравенство равносильно следующему:

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{4\left(x^2-3x\right)+\left|x^2-3x\right|}\leqslant 0.$$

Знаменатель представляет собой выражение вида $4a+|a|$. Заметим, что знак этого выражения совпадает со знаком a при любых a. Действительно, если $a>0$, то $4a+|a|=5a>0$, а если $a<0$, то $4a+|a|=3a<0$. Учитывая также, что числитель дроби неотрицателен при всех значениях переменной, имеем

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{x^2-3x}\leqslant 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-1|-2=0,\\ x^2-3x\neq 0,\end{cases}\\ x^2-3x<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3 \text{ или } x=-1,\\ x\neq 0 \text{ и } x\neq 3,\end{cases}\\ 0<x<3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ 0<x<3.\end{array}\right.$$

Итак, $x\in\{-1\}\cup(0;3)$.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

Ответ: 24.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть его биссектриса AN и медиана BM пересекаются в точке O. В треугольнике ABM отрезок AO является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник равнобедренный, $AM=BM$.
Обозначим $AB=y$, $y\in\mathbb{Z}$. Тогда $AM=MC=y$. По свойству биссектрисы $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$, поэтому если $BN=x$, то $CN=2x$. Сумма сторон треугольника равна периметру, т.е. $3(x+y)=300$, откуда $y=100-x$, поэтому $x\in\mathbb{Z}$. Учтём неравенство треугольника:

$$\begin{cases}2y<y+3x,\\ 3x<y+2y,\\ y<2y+3x.\end{cases}\Leftrightarrow x<y<3x.$$

Так как $y=100-x$, то $x<100-x<3x\Leftrightarrow 25<x<50$. На этом интервале содержится 24 целых значения x.

Покажем, что никакая неупорядоченная тройка длин сторон треугольника $(a;b;c)$ не была посчитана более одного раза. Из двойного неравенства $x<y<3x$ заключаем, что из сторон треугольника y, $2y$ и $3x$ сторона y – наименьшая. Тогда по заданному значению y вся тройка $(a;b;c)$ восстанавливается однозначно: наименьшее из этих чисел равно y, ещё одно равно $2y$, а третье равно $p-y-2y$ (где p – периметр). Поэтому две различные неупорядоченные тройки длин сторон задаются различными значениями y.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}y-2x=\sqrt{xy},\\ 2y+x^2=9.\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}; -\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$, $(4;1)$.

Решение. Первое уравнение при условии $y-2x \geqslant 0$ равносильно уравнению $(y-2x)^2 = xy$, откуда $y^2-5xy+4x^2=0$, $(y-x)(y-4x)=0$, т.е. $y=x$ или $y=4x$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $y=x$, то $x^2+2x-9=0$, и получаем две пары $x=-1-\sqrt{10}$, $y=-1-\sqrt{10}$ и $x=-1+\sqrt{10}$, $y=-1+\sqrt{10}$.
Если $y=4x$, то $x^2+8x-9=0$, откуда также имеем две пары $x=1$, $y=4$ и $x=-9$, $y=-36$.

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $y \geqslant 2x$ удовлетворяют только две из них: $\left(-1-\sqrt{10}; -11\sqrt{10}\right)$, $(1;4)$.

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

Ответ: 6:5.

Решение. Пусть отрезки BO и AC пересекаются в точке N. Так как треугольник ABC равнобедренный, а BO является биссектрисой угла B, то биссектриса BN треугольника ABC является также его медианой и высотой. Пусть $\angle AON = \alpha$. Поскольку $OA \parallel CH$, то $\angle ACH = \alpha$. Отметим, что этот угол вписан в окружность и опирается на дугу AD, поэтому $\smile AD = 2\alpha$. По теореме об угле между касательной и секущей $\angle DAH = \frac{1}{2} \smile AD = \alpha$. Кроме того, $\angle ABO = 90^\circ - \angle AOB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$.

Далее имеем:

$$\begin{gathered}
AB = AO \operatorname{ctg}\alpha = 6\operatorname{ctg}\alpha;\\
AN = AO\cos\alpha = 6\cos\alpha;\ AC = 2AN = 12\cos\alpha;\\
AH = AC\sin\alpha = 12\cos\alpha\sin\alpha;\\
DH = AH\operatorname{tg}\alpha = 12\sin^2\alpha;\\
CH = AC\cos\alpha = 12\cos^2\alpha;\\
AB:CH = 6\operatorname{ctg}\alpha : (12\operatorname{ctg}^2\alpha) = 1:(2\sin\alpha\cos\alpha);\\
S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot DH = \frac{1}{2}\cdot 6\operatorname{ctg}\alpha\cdot 12\sin^2\alpha = 36\cos\alpha\sin\alpha.
\end{gathered}$$

Так как по условию площадь треугольника ABD равна 15, отсюда получаем $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{5}{12}$, и искомое отношение $AB:CH$ равно $6:5$.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $BC=\sqrt{29}$, $AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

Ответ: $AD:AC = 3:5$, $S_{\triangle ADE} = \frac{45}{4}$.

Решение. Из точек C и E отрезок BD виден под углом 90°, поэтому точки B, C, D, E лежат на одной окружности. Но тогда $\angle CBD$ и $\angle CED$ вписаны в эту окружность и опираются на одну и ту же дугу, а значит, равны между собой, т.е. $\angle CBD = 45^\circ$. Следовательно, $CD = BC = \sqrt{29}$. Тогда $AD = AC - CD = \frac{3\sqrt{29}}{2}$, и $AD:AC = 3:5$.

Вычислим площадь треугольника ADE. Обозначим его угол при вершине A через α. Далее находим: $AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$; $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot AD\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{29}}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{45}{4}$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases}|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6,\\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{13\pi}{4}-3$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы. Если обозначить $3x=a$, $2y=b$, $6-3x-2y=c$, то неравенство принимает вид $|a|+|b|+|c|>a+b+c$. Это неравенство не выполнено тогда и только тогда, когда все три числа a, b, c неотрицательны. Действительно, $|p|\geqslant p$ при всех p, причём при $p\geqslant 0$ выполняется равенство, а при $p<0$ – строгое неравенство. Значит, первое неравенство системы **не** выполнено при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ и $6-3x-2y\geqslant 0$. Эти три неравенства определяют треугольник с вершинами в точках $A(2;0)$, $B(0;3)$, $O(0;0)$.

Второе неравенство может быть записано в виде $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\leqslant\frac{13}{4}$ – оно задаёт круг радиуса $\sqrt{\frac{13}{4}}$ с центром в точке $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$. Заметим, что точка M является серединой гипотенузы AB треугольника, AOB, а радиус круга равен половине гипотенузы. Это означает, что круг описан около треугольника AOB. Пересечением двух множеств является круг с центром M радиуса $\frac{\sqrt{13}}{2}$ с вырезанным из него треугольником ABO. Площадь этой фигуры равна $\pi\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=\frac{13\pi}{4}-3$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

Ответ: 128.

Решение. Подставляя $a=1$ в равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, получаем $f(b)=f(1)+f(b)$, значит, $f(1)=0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить $a=\frac{x}{y}$, $b=y$, то получаем $f(x)=f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$, откуда $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$. Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab)=f(a)+f(b)$, например, $f(15)=f(3\cdot 5)=f(3)+f(5)=3+5=8$. Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n\in[3;19]$ и записываем их в таблицу:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n)$	3	4	5	5	7	6	6	7	11
n	12	13	14	15	16	17	18	19	
$f(n)$	7	13	9	8	8	17	8	19	

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=f(1)=0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right)>0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$. Посчитаем количество пар $(x;y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$, нужно найти количество пар $(x;y)$ из таблицы выше, для которых $f(x)=f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $x = y$. В данном случае имеется 17 вариантов.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 5$. В таблице есть 2 аргумента, при которых $f = 1$. Выбирая пару таких аргументов, первый можно выбрать 2 способами, а второй – 1 способом. Значит, количество пар такого типа равно $2 \cdot 1 = 2$.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 6$. Аналогично предыдущему пункту получаем $2 \cdot 1 = 2$ пары.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 7$. Здесь $3 \cdot 2 = 6$ пар.
- $x \neq y$, а $f(x) = f(y) = 8$. Здесь $3 \cdot 2 = 6$ пар.

Итого, есть $17+2+2+6+6 = 33$ пары натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $17^2 = 289$ пар, поэтому тех, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, ровно $\frac{289-33}{2} = 128$.